

Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Analitička geometrija

- Uz $\vec{a} = [\overrightarrow{T_0 T_1}] = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, tj. $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{T_0 T_2}] = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$, tj. $T_2(x_2, y_2, z_2)$, jednadžba ravnine kroz tri točke:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

- Izračunavanjem determinante dobivamo izraz oblika

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (*)$$

za neke $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Obratno, pokažimo da je skup svih $(x, y, z) \in E^3$ za koje vrijedi (*) jedna ravnina, čim je barem jedan od koeficijenata $A, B, C \neq 0$.

Teorem 3

Neka su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ takvi da je $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Skup svih točaka $(x, y, z) \in E^3$ takvih da vrijedi $Ax + By + Cz + D = 0$ je ravnina u E^3 . Ovakav zapis zovemo *opći oblik jednadžbe ravnine*.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo $A \neq 0$ (analogno za $B \neq 0$ ili $C \neq 0$).

Neka je $S \subseteq E^3$ skup svih točaka prostora za koje vrijedi uvjet, tj.

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}.$$

Uočimo da je točka

$$T_0 \left(\frac{-B - C - D}{A}, 1, 1 \right) \in S,$$

uz

$$x_0 = \frac{-B - C - D}{A}, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1.$$

Stavimo

$$\vec{n} := (A, B, C)$$

i dopunimo $\{\vec{n}\}$ do ortogonalne baze od V^3 :

$$\{\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}\}.$$

Pokažimo da je $S = \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b})$, tj. da je S ravnina koja prolazi točkom T_0 , razapeta vektorima \vec{a} i \vec{b} .

Ravnina u E^3

\square Neka je $T(x, y, z) \in S$. Tvrdimo da je

$$T \in \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b}).$$

Budući da

$$T \in S \implies Ax + By + Cz + D = 0$$

i

$$T_0 \in S \implies Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

oduzimanjem dobivamo

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$\vec{n} \cdot [\overrightarrow{T_0 T}] = 0.$$

Prikažimo $[\overrightarrow{T_0 T}]$ u bazi $\{\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}\}$. Postoje $\gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$[\overrightarrow{T_0 T}] = \gamma \vec{n} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Tada

$$0 = [\overrightarrow{T_0 T}] \cdot \vec{n} = \gamma \vec{n} \cdot \vec{n} + \alpha \vec{a} \cdot \vec{n} + \beta \vec{b} \cdot \vec{n}.$$

Kako je $\{\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}\}$ ortogonalna baza, vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 0.$$

Zato je

$$0 = \gamma \|\vec{n}\|^2.$$

Ravnina u E^3

Budući da je $\vec{n} \neq \vec{0}$, slijedi da je $\gamma = 0$. Dakle,

$$[\overrightarrow{T_0 T}] = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b},$$

pa je

$$T \in \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b}).$$

\square Neka je $T \in \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b})$, $T = (x, y, z)$. Tvrdimo da je $T \in S$.

Tada za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0 T}] = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Stoga

$$[\overrightarrow{T_0 T}] \cdot \vec{n} = \alpha \vec{a} \cdot \vec{n} + \beta \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 + 0 = 0.$$

Dakle,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Oдавде slijedi

$$Ax + By + Cz + D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

jer je $T_0 \in S$. Prema tome,

$$T(x, y, z) \in S.$$

Zaključujemo:

$$S = \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b}).$$

\square

Uočimo, ako ravnina π ima jednadžbu $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, onda iz dokaza vidimo da vrijedi

$$T_1, T_2 \in \pi \iff [\overrightarrow{T_1 T_2}] \perp \vec{n},$$

za

$$\vec{n} = (A, B, C).$$

Vektor \vec{n} zovemo **vektor normale** ravnine π .

Također, za $T(x, y, z) \in \pi$ vrijedi

$$\vec{r}_T \cdot \vec{n} + D = Ax + By + Cz + D = 0. \quad (*)$$

Nadalje, ako vrijedi $Ax + By + Cz + D = 0$, onda za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + \lambda D = 0.$$

Dakle, opći oblik jednadžbe ravnine nije jedinstven.

Uočimo, vektori normale (A, B, C) i $(\lambda A, \lambda B, \lambda C)$ su kolinearni.

Često odabiremo jedinični vektor normale.

Udaljenost točke od ravnine u E^3

Definicija

Udaljenost točke T od ravnine π definira se kao

$$d(T, \pi) = \inf_{X \in \pi} d(T, X).$$

Teorem 4

Neka je ravnina π zadana s

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

te neka je točka

$$T_0(x_0, y_0, z_0) \in E^3.$$

Tada je

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Udaljenost točke od ravnine u E^3

Dokaz.

Neka je

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

vektor normale od π i neka je T_π sjecište ravnine π i pravca kroz T_0 paralelnog sa \vec{n} .

Tada je

$$[\overrightarrow{T_\pi T_0}] \perp [\overrightarrow{T_\pi X}] \quad \text{za sve } X \in \pi,$$

pa je trokut $\triangle T_0 T_\pi X$ pravokutan.

Stoga vrijedi

$$|\overrightarrow{T_0 T_\pi}| \leq |\overrightarrow{T_0 X}|,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je $X = T_\pi$.

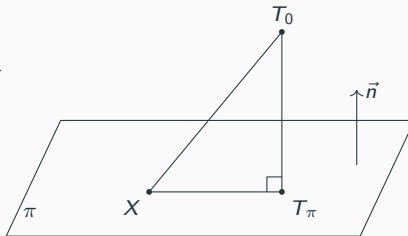
Dakle,

$$d(T_0, \pi) = d(T_0, T_\pi) = |[\overrightarrow{T_\pi T_0}]| = |\alpha \cdot \vec{n}_0| = |\alpha|,$$

pri čemu je

$$\vec{n}_0 = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$$

normirani vektor normale.



Udaljenost točke od ravnine u E^3

Odredimo α . Neka je

$$T_\pi = (x_\pi, y_\pi, z_\pi) \in \pi.$$

Tada

$$[\overrightarrow{T_\pi T_0}] = (x_0 - x_\pi, y_0 - y_\pi, z_0 - z_\pi) = \alpha \cdot \vec{n}_0.$$

Budući da je \vec{n}_0 jediničan,

$$[\overrightarrow{T_\pi T_0}] \cdot \vec{n}_0 = \alpha \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = \alpha, .$$

Dakle,

$$\alpha = -\overrightarrow{T_\pi \vec{O}} \cdot \vec{n}_0 + \overrightarrow{T_0 \vec{O}} \cdot \vec{n}_0.$$

Budući da je

$$\overrightarrow{T_\pi \vec{O}} \cdot \vec{n}_0 = \frac{Ax_\pi + By_\pi + Cz_\pi}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

jer je $T_\pi \in \pi$, te

$$\overrightarrow{T_0 \vec{O}} \cdot \vec{n}_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

dobivamo

$$\alpha = -\left(-\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) + \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Stoga

$$d(T_0, \pi) = |\alpha| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Udaljenost točke od ravnine u E^3

Uočimo, predznak od α ovisi o tome jesu li $\overrightarrow{T_\pi T_0}$ i \vec{n}_0 iste orijentacije.

Udaljenost ishodišta od ravnine π je

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Predznak od D je > 0 ako vektor normale pokazuje prema ishodištu, a < 0 ako pokazuje u suprotnom smjeru.

Podijelimo opći oblik jednadžbe ravnine sa

$$-\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \text{sign}(D) \in \{\pm 1\}.$$

Tada dobivamo

$$\begin{aligned} & -\frac{A}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x - \frac{B}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y \\ & -\frac{C}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z - \frac{D}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \end{aligned}$$

Pišemo

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z - \delta = 0,$$

što zovemo **Hesseov** ili **normalni oblik jednadžbe ravnine**.

Udaljenost točke od ravnine u E^3

Uočimo:

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

je jedinični vektor normale, a α, β, γ su kutovi koje \vec{n} zatvara redom s $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

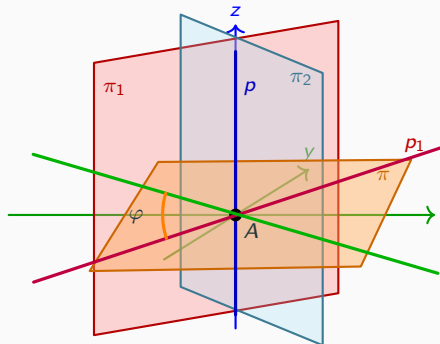
Također,

$$\delta \geq 0$$

je udaljenost ravnine od ishodišta.

Kako definirati (i izračunati) kut među ravninama?

Kut između dviju ravnina



Definicija

Neka su dane ravnine π_1 i π_2 čiji je presjek pravac p .

Neka je $A \in p$ proizvoljna točka, te π ravnina okomita na pravac p koja prolazi kroz A .

Neka je

$$p_1 := \pi_1 \cap \pi, \quad p_2 := \pi_2 \cap \pi.$$

Kut među ravninama π_1 i π_2 definira se kao manji od kutova koje zatvaraju pravci p_1 i p_2 .

Oznaka:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2).$$

Ako se ravnine ne sijeku, kažemo da su **paralelne**.

Kut između dviju ravnina

Napomena. Neka su \vec{p} , \vec{p}_1 i \vec{p}_2 jedinični vektori u smjeru pravaca p , p_1 i p_2 redom, a \vec{n}_1 i \vec{n}_2 jedinični vektori normale za π_1 i π_2 .

Tada je

$$\cos \varphi = |\cos \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2)| = |\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|.$$

Budući da $\{\vec{p}_1, \vec{n}_1, \vec{p}\}$ i $\{\vec{p}_2, \vec{n}_2, \vec{p}\}$ čine ortonormiranu bazu,

$$\vec{p}_1 = \pm(\vec{p} \times \vec{n}_1), \quad \vec{p}_2 = \pm(\vec{p} \times \vec{n}_2),$$

slijedi

$$|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2| = |(\vec{p} \times \vec{n}_1) \cdot (\vec{p} \times \vec{n}_2)|.$$

Može se pokazati (preko determinanti matrica) da vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Zato je

$$|(\vec{p} \times \vec{n}_1) \cdot (\vec{p} \times \vec{n}_2)| = |(\vec{p} \cdot \vec{p})(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) - (\vec{p} \cdot \vec{n}_2)(\vec{n}_1 \cdot \vec{p})|.$$

Kako je $\vec{p} \perp \vec{n}_1$, $\vec{p} \perp \vec{n}_2$ i $|\vec{p}| = 1$, slijedi

$$\cos \varphi = |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|.$$

Dakle, kut koji zatvaraju ravnine jednak je manjem od kutova koje zatvaraju vektori njihovih normala.

Kut između dviju ravnina

Propozicija 5

Ako su

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

onda je

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Dokaz.

Jedinični vektori normale su

$$\vec{n}_1 = \frac{(A_1, B_1, C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \vec{n}_2 = \frac{(A_2, B_2, C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Uvrstimo u formulu

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|.$$

□

Neka je p proizvoljan pravac, te $T_0, T_1 \in p$. Stavimo

$$\vec{a} = \overrightarrow{T_0 T_1}.$$

Očito za bilo koji $X \in p$ su T_0, T_1, X kolinearne, pa postoji

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

tako da

$$\overrightarrow{T_0 X} = \alpha \vec{a}.$$

Neka je O ishodište koordinatnog sustava u E^3 . Tada je

$$\vec{r}_X - \vec{r}_{T_0} = \alpha \vec{a}$$

pa je

$$X \in p \iff \vec{r}_X = \vec{r}_{T_0} + \alpha \vec{a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

što je **vektorski parametarski oblik** jednadžbe pravca.

Ako uvedemo koordinatni zapis

$$T_0(x_0, y_0, z_0), \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad X(x, y, z),$$

onda:

$$X \in p \iff \begin{cases} x = x_0 + \alpha a_x, \\ y = y_0 + \alpha a_y, \\ z = z_0 + \alpha a_z, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

To su **parametarske jednačbe pravca**.

Budući da je $\vec{r}_X - \vec{r}_{T_0}$ kolinearan s \vec{a} , vrijedi

$$(\vec{r}_X - \vec{r}_{T_0}) \times \vec{a} = \vec{0}$$

što je **vektorski oblik normalne jednačbe pravca**.

Sada je

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{0},$$

tj.

$$\begin{aligned} & (a_z(y - y_0) - a_y(z - z_0))\vec{i} \\ & - (a_z(x - x_0) - a_x(z - z_0))\vec{j} \\ & + (a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0))\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Dakle:

$$\begin{cases} a_z(y - y_0) = a_y(z - z_0), \\ a_z(x - x_0) = a_x(z - z_0), \\ a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0). \end{cases}$$

Iz parametarskih jednađbi dobivamo **kanonsku** ili **normalnu jednađbu pravca**.

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

Neka pravac p prolazi kroz točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$.

Pravac ima smjer

$$\vec{a} = \overrightarrow{T_1 T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Zato u gornje formule uvrstimo

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Dobivamo **vektorski parametarski oblik jednadžbe pravca kroz dvije točke:**

$$X \in p \iff \vec{r}_X = \vec{r}_1 + \alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Odnosno:

$$\vec{r}_X = (1 - \alpha)\vec{r}_1 + \alpha\vec{r}_2.$$

Parametarske jednadžbe pravca kroz dvije točke:

$$\begin{cases} x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \\ y = (1 - \alpha)y_1 + \alpha y_2, \\ z = (1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Kanonske jednadžbe pravca kroz dvije točke:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Neka je pravac p presjek ravnina π_1 i π_2 ,

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Tada su **opće jednačbe pravca**:

$$p : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Sve točke koje zadovoljavaju obje jednačbe, i samo one, pripadaju pravcu p .

Da bi presjek ravnina postojao i bio pravac, njihove normale ne smiju biti kolinearne, tj.

$$\frac{A_1}{A_2}, \quad \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{C_1}{C_2}$$

ne smiju sve biti iste.

Ekvivalentno,

$$(A_1, B_1, C_1) \text{ i } (A_2, B_2, C_2)$$

ne smiju biti kolinearni vektori.

Kut između pravaca u E^3

Već smo definirali kut između pravaca p_1 i p_2 koji leže u istoj ravnini. No, što ako su pravci mimosmjerni?

U tom slučaju, naći ćemo njima paralelne pravce q_1 i q_2 koji se sijeku.

Definicija

Kut između pravaca p_1 i p_2 u E^3 je manji od dva suplementarna kuta koja zatvaraju pravci q_1 i q_2 , takvi da

$$q_1 \parallel p_1, \quad q_2 \parallel p_2, \quad q_1 \cap q_2 \neq \emptyset.$$

Oznaka:

$$\sphericalangle(p_1, p_2).$$

Po definiciji vrijedi

$$\sphericalangle(p_1, p_2) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kut između pravaca u E^3

Propozicija 6

Neka je $p_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \alpha \vec{a}$, $p_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \beta \vec{b}$, gdje su

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Tada vrijedi

$$\cos \angle(p_1, p_2) = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Dokaz.

Očito vrijedi

$$\cos \angle(p_1, p_2) = \left| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$



Kut između pravaca u E^3

Uočimo, pravci su okomiti ako vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

tj.

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

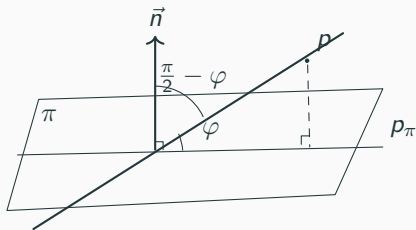
Pravci su paralelni ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}.$$

Odnosno:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Kut između pravca i ravnine



Def. Kut $\angle(p, \pi)$ između pravca p i ravnine π je kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije (u oznaci p_π) na π .

Jasno,

$$\angle(p, \pi) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ako je ortogonalna projekcija od p na π točka, stavljamo

$$\angle(p, \pi) := \frac{\pi}{2}.$$

Kut između pravca i ravnine

Propozicija 7

Neka je p pravac dan jednačbom

$$p \dots \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad \vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma),$$

a π ravnina dana jednačbom

$$\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0.$$

Tada za kut $\varphi = \angle(p, \pi)$ vrijedi

$$\sin \varphi = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dokaz.

$$\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \angle(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

gdje je

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

vektor normale ravnine π .

□

Napomena. Pravac p i ravnina π su paralelni ako

$$\angle(p, \pi) = 0,$$

tj.

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0.$$

Pravac p i ravnina π su okomiti ako

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

tj. smjer pravca jednak je smjeru normale ravnine.